职前数学教师对“负负得正”模型理解水平的调查研究*

杭州师范大学经亨颐教育学院 311121 张芳铭 巩子坤†
澳门大学教育学院 999078 江春莲

【摘 要】 调查职前数学教师对“负负得正”模型的理解水平,结果发现:细胞、相反数、向后转模型是职前数学教师能较好理解的模型;职前数学教师对常见现实情境、符号含义单一的模型理解较好,对基于算法的模型的理解水平要好过基于算理的模型,数学素养存在提升空间.职前数学教师、在职数学教师和学生在相反数模型上存在一致性.基于调查结果提出“负负得正”教学建议:注重现实情境模型与“说理”相结合,使用多样化的模型,不拘泥于教材.

【关键词】 职前数学教师;负负得正;数学模型;理解水平

1 问题缘起

模型是对客观事物简化、抽象的表征,对人们理解、研究客观事物具有重要的作用.构建数学模型是将实际问题数学化,从而通过数学方法分析、解决问题.数学模型也是学生学习的重要载体,因此教师在教学中要对所使用的数学模型有充分的理解.

在初等数学中,有理数乘法运算占有重要的地位,而理解有理数乘法运算的关键是理解“负负得正”[1],但“负负得正”的证明多种多样[2-3],教师不好把握,学生不好理解,模型是让学生体会“负负得正”合理性的载体[4],因此模型的选择尤为重要.人教版教材[5]中,用负因子乘以正等差数列,得到的结果为负等差数列,再应用到一组负因子乘以负等差数列中,得到“负负得正”(图1).

$$\boxed{\begin{array}{l}(-3)\times3=\_\_\_\_,\\(-3)\times2=\_\_\_\_,\\(-3)\times1=\_\_\_\_,\\(-3)\times0=\_\_\_\_.\end{array}}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\begin{array}{l}(-3)\times(-1)=\_\_\_\_,\\(-3)\times(-2)=\_\_\_\_,\\(-3)\times(-3)=\_\_\_\_.\end{array}}$$

图1 人教版教材中如何得到“负负得正”

浙教版教材[6]中用相反数的性质,由“$3\times(-2)$”和“3×2”的积互为相反数,推出“$(-3)\times(-2)$”和“$3\times(-2)$”的积互为相反数,得到“负负得正”.教师对教材中的模型,是否能完美使用?学生对教材中的模型,是否能完全理解?已有研究[7-8]表明,教师教学时使用的模型对学生的理解没有显著性影响,学生要回答“负负得正”很容易,但要说明为什么“负负得正”却有难度.这表明对于教材中的模型,教师讲不透,学生理解不了,并不是最优选择.

教材之外的“负负得正”模型也很丰富,如G·博莱特的“负债模型”,M·克莱因的“面积模型”,佟巍[7]的“动手模型”等.龚烈炯[9]发现,部分数学教师认为具有现实情景的“负负得正”模型不容易理解,因此在教学中尽量规避这类模型.巩子坤[10]的研究表明,教师和学生都喜欢的“负负得正”模型是归纳、数轴和相反数模型,其中数轴模型是具有现实背景的模型,这表明并非所有具有现实背景的“负负得正”模型都不易理解.哪种模型是贯通从学生到教师的“好模型”?已有研究多从在职数学教师和学生的视角入手,而忽略了职前数学教师.职前数学教师既是在职数学教师的前身,也是正在接受教育的师范生,考察职前数学教师对不同“负负得正”模型的理解水平,有利于进一步明晰“负负得正”教学的有效模型.

本研究采用问卷调查法,了解某师范大学应届职前数学教师对“负负得正”模型的理解水平.主要解决以下研究问题:(1)职前数学教师对“负负得正”模型的理解水平如何?(2)职前数学教师对模型的理解与在职数学教师、学生相比,有何异同?(3)基于此调查研究,为“负负得正”教学提供建议.

2 研究方法

1.1 研究对象

被试为某高校数学师范专业的应届生,他们都

* 基金项目 浙江省哲学社会科学规划课题“基于认知发展模型的义务教育教科书编写质量提升研究”(23NDJC265YB);浙江省高校重大人文社科攻关计划项目“建设高质量教育体系背景下义务教育教科书编写质量提升路径研究”(2023GH005).

† 通信作者

完成了教师教育课程与培训,并且都有从事中小学数学教师工作的意愿.共发放问卷75份,有效问卷66份.

1.2 调查工具

以巩子坤[10]的"负负得正"有效教学模型为问卷基础并进行优化,共包含10个模型,调查数据运用SPSS27.0软件进行统计、分析.

1.3 数据收集与处理

为获得客观、真实的答案,采用集中调查、问卷匿名的方式,安排被试在同一时间和地点,在发放问卷之前阐述研究目的,保证在没有外界干预的条件下完成问卷.

为分析被试对模型的理解水平,借鉴鲁晓莉等人[11]开发的数学建模素养评价中的结果性评价,结合李明振等人[12]对数学建模过程的研究,将理解水平划分为四个等级(如表1),并进行赋分.

表1 对"负负得正"模型理解水平的划分

编码	分值	评价标准	例 "细胞模型"中的回答
水平0	0分	无法理解模型,不能从中提取信息,或提取不正确、无意义的信息,无法利用模型对"负负得正"做正确的说明	(1)空白; (2)"生长一个癌细胞"或"癌细胞变正常细胞"
水平1	1分	能够正确理解模型,但未能利用模型对"负负得正"做正确的说明	"杀死一个癌细胞"表示为(-)(-),"生长出一个好细胞"表示为(+)(+)
水平2	2分	能够正确理解模型,并利用模型对"负负得正"做出说明,但说明不完全正确,包括不完整、不准确或者过于繁琐	"(-)(-)表示杀死一个癌细胞,对人是有益的"
水平3	3分	能够正确理解模型,并利用模型对"负负得正"做出完整的、正确的说明	癌细胞为(-),杀死一个细胞为(-),对人体来说"杀死一个癌细胞是好事"可以表示为"(-)(-)=(+)",即"负负得正"

3 研究结果

3.1 整体情况

职前数学教师对不同模型的理解水平频(人)数、百分比以及平均分见表2.

表2 职前数学教师对不同模型的理解水平

模型		水平3	水平2	水平1	水平0	平均分
细胞模型	频数	53	9	2	2	2.71
	百分比	80.4%	13.6%	3%	3%	
向后转模型	频数	54	4	1	7	2.59
	百分比	81.8%	6.1%	1.5%	10.6%	
电荷模型	频数	27	17	15	7	1.97
	百分比	40.9%	25.8%	22.7%	10.6%	
红利-债务模型	频数	30	12	16	8	1.97
	百分比	45.5%	18.2%	24.2%	12.1%	
给排水模型	频数	40	15	6	5	2.36
	百分比	60.6%	22.7%	9.1%	7.6%	
数轴模型	频数	20	16	21	9	1.71
	百分比	30.3%	24.3%	31.8%	13.6%	
面积模型	频数	19	17	13	17	1.57
	百分比	28.8%	25.8%	19.7%	25.7%	
归纳模型	频数	25	20	15	6	1.97
	百分比	37.9%	30.3%	22.7%	9.1%	
分配律模型	频数	28	14	24	0	2.06
	百分比	42.4%	21.2%	36.4%	0%	
相反数模型	频数	48	14	3	1	2.65
	百分比	72.7%	21.2%	4.6%	1.5%	

通过表2,可以发现:职前数学教师对不同模型的理解水平按细胞、相反数、向后转、给排水、分配律、红利-债务(与归纳、电荷模型并列)、数轴、面积模型依次下降.

职前数学教师对细胞模型理解水平的平均分是2.71,是理解水平最高的模型.细胞模型中的"+"表示"生长""正常细胞","-"表示"死亡""癌细胞",符号既表示细胞的两种相反属性,也表示两种相对的动作,符合人们对"相反"的感觉,"生长正常细胞是好事""杀死癌细胞是好事"也是容易理解的常识.因此可以解释职前数学教师为什么对细胞模型的理解水平最高.

职前数学教师对面积模型理解水平的平均分是1.57,是理解水平最低的模型.通过面积关系说明"负负得正",可以利用正方形EAGI(如图2),其面积既

可以表示为“10×10”，也可以表示为“(12-2)×(11-1)”，通过面积的等价性，说明“负负得正”.

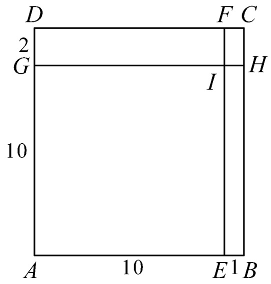

图 2　面积模式示意图

与其他模型相比，面积模型具有抽象性，提高了理解难度.大部分职前数学教师在解答时不知所措，没有发现面积之间的等量关系，在回答时仅用单个图形面积的计算来说明“负负得正”，会出现“忽略图形”(如图 3)和“长度出现负值”(如图 4)的情况，前者模仿示例，脱离图形，丢失了面积模型的意义;后者则用负数作为长度的数值，表达不严谨.

9分解为 10, -1
8分解为 10, -2
8×9=(10-2)(10-1)
=10×10-2×10-1×10+(-2)×(-1)
=70+(-2)×(-1)=72　∴(-2)×(-1)=2

图 3　忽略图形

对于矩形FCIH而言，IH=BE，FI=DG
而BE和DG均为被分解的线段，其长度计为负，
即IH=BE=-1，FI=DG=-2
易知 $S_{FCIH}=2$
所以有(-1)×(-2)=2

图 4　长度出现负值

3.2　对模型的分类

基于理解水平的得分，进一步探究模型之间的差异.由于理解水平得分的数据形态不满足正态分布，因此采用弗莱德曼(Friedman)检验分析得分情况，结果表明十个模型的理解水平得分具有显著差异($p<0.05$).成对比较分析显示，职前数学教师在向后转、相反数、细胞模型的理解水平上不存在显著差异，记为Ⅰ类模型;在电荷、归纳和红利-债务模型的理解水平上不存在显著差异，记为Ⅱ类模型;在面积、数轴模型的理解水平上不存在显著差异，记为Ⅲ类模型;在给排水模型的理解水平上与其余三类模型存在显著差异，三类模型之间存在显著差异.结合表 2 可知，“负负得正”模型按理解难度划分，从易到难依次为:Ⅰ类模型、给排水模型、Ⅱ类模型、Ⅲ类模型.

4　讨论与分析

4.1　易被理解与不易被理解的模型

(1)有常见现实情境、符号含义单一的模型易被理解;情境复杂、符号含义多元、涉及其他学科的模型不易被理解.细胞、向后转模型是具有现实背景的模型，符号仅表示状态和动作属性，模型情境内容符合生活常识，因此容易被理解.红利—债务、数轴模型尽管情境生活化，但符号含义太多，因此不易理解.电荷模型涉及物理知识，虽然情境简单，但部分职前数学教师没有明白电荷平衡的前提是正电荷与负电荷数相等(如图 5)，取出一个负电荷，就会产生一个正电荷.这表明对其他学科知识的要求也会成为影响理解水平的因素.

回答1. (-3)×(-2) 取走3组负电荷
每一组有两个负电荷，共取走6个
回答2. 取走3组负电荷 (-3)×(-2)=6

图 5　对电荷平衡理解不当

(2)“时空”模型不易被理解，但合适的情境可以降低理解难度.“时”是指过去、现在和将来，“空”是指方向或性质相反的动作.红利—债务、给排水和数轴模型均为这类模型.红利—债务模型中常见符号含义理解错误，分不清符号表示的时间先后，以及收入还是支出(如图 6);数轴模型中常见忽略符号的时间含义(如图 7)，也会忽略将路程与数轴上的点建立联系(如图 8).

回答1. 假设每月需要向银行偿还500美元的债务，
现在还清.相当于每月可以不支付债务及利息
即在接下来的6个月，不需支付，相当于收入
-6×(-$500)=$3000
回答2. 如果提前6个月还清债务.则(-6)×(-500)=3000
可以少交3000$

图 6　红利—债务模型中对符号的理解错误.

(-3)×(-50)可以看作一辆车从零点出发，以每小时50公里的速度向西行驶-3小时，相当于向东行驶，因此行至东面(+3)×(+50)=150公里处.

图 7　数轴模型中忽略符号的时间含义

过去3小时，一辆车从零点出发向西行驶
以每小时50km的速度
(-3)×(-50)=150

图 8　数轴模型中忽略数轴意义

给排水模型是简单的“时空”模型，“水池蓄、排水问题”在小学就已学习，所以职前数学教师对给排

水模型的理解水平高于红利-债务和数轴模型是可以理解的.陈晓明[13] 认为,这类模型实质上是通过有理数知识建模来解决实际问题的过程,对抽象思维要求能力较高,所以对初中生来说很复杂.现在来看,理解好这类模型对于职前数学教师来说也不简单,甚至是有难度的.

(3) 基于算法的模型易被理解,基于算理的模型不易被理解.相反数模型类比正整数加法和乘法的运算,是基于算法的模型,“-1 与任意一个数的乘积等于该数的相反数”对于职前数学教师来说是易于理解和表达的[14].归纳、分配律模型是基于算理的模型,归纳模型暗含了运算的一致性,正数与负数相乘的运算在负数与负数相乘中仍然成立,大部分职前数学教师没有体会到运算一致性,只用数学归纳法进行证明(如图 9).分配律模型则是在“保持运算的持续性”的基础上推出“负负得正”,具有形式推理的味道[10],但大部分职前数学教师并不理解这类模型,更不能进行推导.这反映出职前数学教师对有理数运算的算理理解不深刻,数学表达也不严谨.

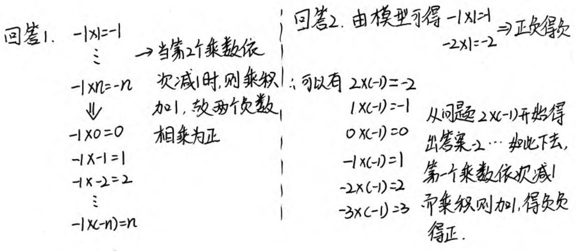

图 9　归纳模型的部分回答

4.2　分析与讨论

结合已有研究,发现职前数学教师在“负负得正”模型的理解上与学生、在职数学教师存在一致性和差异性.

(1) 职前数学教师和学生在细胞、相反数模型上存在一致性.巩子坤[10] 发现,学生在学习“负负得正”时,喜欢归纳、细胞和相反数模型,但在说明“负负得正”时,却极少使用归纳模型.陈思琪的调查发现,学生对于归纳模型实质上是靠“猜”而非算理上的理解,说明学生是“迫于”教材推荐才接受归纳模型,细胞、相反数模型是学生真正喜欢并能理解的模型.职前数学教师对归纳模型的理解也存在不足,而在细胞、相反数模型的理解上表现优异,说明这两个模型是贯穿从学生到教师的好模型.

(2) 职前数学教师和在职数学教师在归纳、数轴模型上存在差异性,在相反数模型上存在一致性.在职数学教师喜欢用归纳模型可能是受到教科书的影响,是否能真正理解归纳模型,仍是需要进一步讨论的问题.优化后的数轴模型,难度较大,影响了职前数学教师对数轴模型的理解.相反数模型是在职数学教师常用的模型,也是职前数学教师理解水平较好的模型.

(3) 职前数学教师与在职数学教师、学生在相反数、分配律模型上存在一致性,在数轴模型的上存在差异性.相反数模型是职前数学教师理解水平较好、在职数学教师和学生都喜欢的模型.分配律模型既不受在职数学教师和学生的喜欢,也没有被职前数学教师充分理解,是不被接纳的模型.原数轴模型受到在职数学教师和学生的喜欢,职前数学教师对同样用到数轴但难度较低的向后转模型理解也比较好,因此数轴本身在“负负得正”教学中是有价值的,但要控制难度.

5　结论与建议

5.1　结论

(1) 职前数学教师对说明“负负得正”的不同模型的理解水平存在差异.细胞、相反数和向后转模型,是职前数学教师理解水平最好的模型;给排水模型的理解难度高于前三个模型;归纳、电荷、红利-债务、分配律模型的理解难度更大;数轴、面积模型最难理解.理解跨学科情境的模型和“时空”模型有一定难度.

(2) 职前数学教师与在职数学教师、学生在“负负得正”的模型上存在一致性与差异性.职前数学教师、在职教师和学生在相反数模型上存在一致性;职前数学教师、在职数学教师以及学生在数轴模型上存在差异性,但数轴具有教学价值.职前数学教师和在职数学教师在归纳模型上存在差异性.

(3) 职前数学教师对有理数算理的理解及数学学科素养有待提升.从归纳、分配律模型的解答来看,职前数学教师对算理的理解不深入,部分职前数学教师证明过程不严谨,数学表达存在不足.

5.2　建议

(1) “负负得正”教学应注重现实情境与“说理”的结合.

“负负得正”在初等数学中无法通过逻辑推理来证明[10],合适的现实情境模型有助于学生直观体会“负负得正”的合理性.“负负得正”有着丰富的现实意义,说明“负负得正”的模型也可以具有多样的现实情境.但只有现实情境的模型也不利于学生深入理解算理,因此有必要搭配“说理”的模型,帮助学生理解“负负得正”的合理性.

(2)教学中使用多样化的“负负得正”模型，不拘泥于教材.

在教学中可以将相反数、向后转和细胞模型结合使用，以向后转模型为起点，感受“负负得正”，可以这样引入:

师:同学们，在数轴上以0为原点，向右数值为正，向左数值为负，如图10.假设数轴向左为西，向右为东，一个人站在原点，他可能朝向哪边?

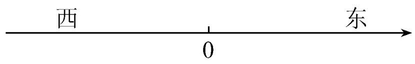

图10　数轴表示方向

生:东或西.

师:没错.那我们可以怎样表示这个人的站向呢?

生:向西用负数表示，向东用正数表示.

师:如果这个人要向后转，我们应该怎样表示呢?

生:乘以(−1)，因为如果朝东，用正数表示，乘以(−1)是负数，就朝西.如果朝西，用负数表示，乘以(−1)是正数，就朝东了.

随后通过细胞模型建立“(−)(−)=(+)”的符号观念.可以这样教学:

师:把细胞的生长定义为(+)，细胞的死亡定义为(−)，好的细胞定义为(+)，癌细胞定义为(−).长了一个正常细胞可以表示为(+)(+)，因为这是好事，所以(+)(+)=(+)，那长了一个癌细胞应该怎么表示呢?

生:(+)(−)，因为是坏事，所以等于(−).

师:死亡一个癌细胞应该怎么表示呢?

生:(−)(−)，因为是好事，所以等于(+).

最后通过相反数模型使学生的符号观念与数字运算结合，可以这样教学:

师:通过前两个例子，相信同学们对“负负得正”有了直观的认识.下面请同学们计算两组式子，并找一下其中的特点.

$3\times3=$______;　　$-3\times3=$______;

$3\times2=$______;　　$-3\times2=$______;

$3\times1=$______;　　$-3\times1=$______;

$3\times0=$______;　　$-3\times0=$______.

生:两数相乘，改变其中一个数的符号，积变为相反数.当然这两个数不能都为0.

师:那我再把另一个数的符号也改变，结果会怎样呢?

$(-3)\times(-1)=$______;

$(-3)\times(-2)=$______;

$(-3)\times(-2)=$______.

生:积又变为原来的相反数了，和第一次运算结果相同.

通过相反数的性质，得到“负负得正”.在教学中不必紧紧抓住不好理解的模型，只要教师能解释好，学生能理解好，就是好模型.

参考文献

[1] 巩子坤.课程目标:理解的视角——以有理数乘法运算为例[J].教育研究，2011，32(07):88−94.

[2] 田载今.“负负得正”的乘法法则可以证明吗?[J].中学数学教学参考，2005(03):3−4.

[3] 陈绮云，何小亚.摆脱法则的枷锁——“负负得正”的新教法及三种证明[J].数学教学通讯，2010(30):24−25.

[4] 巩子坤.“负负得正”何以能被接受[J].数学教学，2010(03):7−10.

[5] 林群，田载今，薛彬，等.义务教育教科书·数学(七年级上册)[M].北京:人民教育出版社，2012.

[6] 范良火，岑申，张宝珍，等.义务教育教科书·数学(七年级上册)[M].杭州:浙江教育出版社，2012.

[7] 佟巍，汪晓勤.负数的历史与“负负得正”的引入[J].中学数学教学参考，2005(Z1):126−128.

[8] 巩子坤.调查与理论分析“负负得正”何以不易理解[J].数学教学，2009(08):7−11.

[9] 龚烈炯.“负负得正”教学再思考[J].中学数学教学参考，2008(16):11−13.

[10] 巩子坤.“负负得正”教学的有效模型——兼论教科书的编写[J].教学月刊(中学版)，2010(01):6−11.

[11] 鲁小莉，程靖，徐斌艳，等.学生数学建模素养的评价工具研究[J].课程·教材·教法，2019，39(02):100−106.

[12] 李明振，喻平，宋乃庆.数学建模的一般认知过程研究[J].数学教育学报，2008(06):45−48.

[13] 陈晓明，杨良畏.有理数乘法“负负得正”教学再思考[J].中学数学研究(华南师范大学版)，2021(06):19−21.

[14] 邵爱娣，栗小妮，汪晓勤.美国早期代数教科书中的“负负得正”解释方式研究[J].数学教育学报，2021，30(01):85−90.

作者简介　张芳铭(1999—)，男，山东莱阳人，硕士研究生;主要从事数学教育理论与实践研究.

巩子坤(1966—)，男，山东滕州人，教授，博士生导师;主要从事数学教育心理研究.

江春莲(1971—)，女，湖北武汉人，助理教授;主要从事数学考试评价、数学教育技术研究.